

Zum Problem rotierender kosmischer Gasmassen

Von KARL ULRICH V. HAGENOW

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 631—640 [1955]; eingegangen am 16. Juli 1955)

Es werden die hydrodynamischen Gleichungen für eine rotierende, flache Gasscheibe mit zeitlich variabler zentraler Verdichtung gelöst unter folgenden vereinfachenden Annahmen über das Gravitationspotential: Als Anfangszustand werde eine starr rotierende ellipsoidische Dichtevertteilung mit verschwindend kleiner Zentralmasse angenommen. Die durch Reibung bedingten Materieströme bewirken eine Zunahme der zentralen Verdichtung. Die Eigengravitation des Gases wird nach einer starre Rotation liefernden Verteilung bestimmt, deren Masse ebenfalls zeitlich variiert. Unter der Annahme, die Radialgeschwindigkeit bleibe klein gegen die Tangentialgeschwindigkeit, gelingt mit einem speziellen Ansatz für den Mischungsweg die geschlossene Integration der Gleichungen. Dabei zeigt sich, daß für ein größeres Zeitintervall die so errechnete Dichtevertteilung von dem für die Gravitation gemachten Ansatz wesentlich nur im Einflußbereich der Zentralmasse abweicht. Es wird versucht, das Modell auf die Sternentstehung und auf den Andromedanebel anzuwenden. Die Übereinstimmung ist in Anbetracht der der Rechnung zugrunde liegenden starken Idealisierungen befriedigend.

Die Entwicklung einer rotierenden Gasmasse mit turbulenter Reibung wurde grundlegend behandelt von v. Weizsäcker¹, dessen Formeln wir hier übernehmen wollen. Von Lüst² wurden die in I aufgestellten Formeln für den Fall einer rotierenden Gasscheibe mit großer Zentralmasse im zwei- und dreidimensionalen Raum behandelt. Hat man keine die Gravitation bestimmende Zentralmasse, so bereitet die Potentialgleichung Schwierigkeiten, die sich im Falle einer flachen Gasscheibe im dreidimensionalen Raum nicht auf eine Differentialgleichung zwischen Flächendichte σ und Winkelgeschwindigkeit ω zurückführen läßt.

In einer zweidimensionalen Welt entfällt diese Komplikation, dieser Fall wurde von Trefftz³ behandelt. Für den Zusammenhang zwischen Flächendichte und Zentralkraft im Dreidimensionalen haben Wyse und Mayall⁴ eine Näherungslösung angegeben, die von v. Hoerner⁵ zur Lösung unseres Problems benutzt wurde. Das angeführte Verfahren⁴ schreibt jedoch einen festen Rand der Gasmasse vor. Um an diesem Rand Divergenzen zu vermeiden, muß man fordern, daß dort neben der Dichte auch noch deren erste und zweite Ableitung verschwinden.

In der vorliegenden Arbeit soll die durch die Potentialgleichung bedingte Schwierigkeit auf eine andere Art umgangen werden: Bekanntlich ist die Zen-

tralkraft in einer flachen Scheibe mit ellipsoidischer Verteilung der Flächendichte genau proportional dem Abstand zum Mittelpunkt. Dem dazugehörigen Potential wollen wir dasjenige einer zunächst kleinen Zentralmasse überlagern und damit die Gleichungen lösen. Die durch Veränderung der Dichtevertteilung bedingte Änderung der Gravitation wollen wir aber nur durch eine Art Mittelwertbildung berücksichtigen, d. h. wir wollen so tun, als ob sich nur die Masse des Gases durch Abfluß in die Zentralmasse geändert habe, seine räumliche Verteilung jedoch die zu linearem Kraftgesetz gehörige geblieben sei.

1. Grundgleichungen

In I werden die vollständigen Formeln angegeben, die wir hier gleich vereinfacht unter ebenfalls dort diskutierten Voraussetzungen hinschreiben wollen.

Wir nehmen an:

1. Rotationssymmetrie.
2. Die Reibung wird als kleine Störung betrachtet.
3. Der Druck wird vernachlässigt, in nullter Näherung (d. h. ohne Reibung) beschreibe jedes Teilchen Kreisbahnen nach dem 3. Keplerschen Gesetz.

¹ C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforschg. **3a**, 524 [1948]; im folgenden als I zitiert.

² R. Lüst, Z. Naturforschg. **7a**, 87 [1952].

³ E. Trefftz, Z. Naturforschg. **7a**, 99 [1952].

⁴ A. B. Wyse u. N. U. Mayall, Astrophys. J. **95**, 24 [1942].

⁵ S. v. Hoerner, Z. Astrophys. **31**, 165 [1952].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die Integration über z sei bereits ausgeführt, wir rechnen also 2-dimensional.

Die erste der beiden übrig bleibenden Bewegungsgleichungen lautet dann

$$v_\varphi^2 = s \Phi'. \quad (1)$$

Die zweite schreiben wir am besten

$$s v_s \sigma (s^2 \omega)' + s \sigma \cdot s^2 \dot{\omega} = -f \delta \{ l^2 s^4 \sigma \omega'^2 \}'. \quad (2)$$

Dabei sind s , φ die ebenen Polarkoordinaten, v_s die radiale, v_φ die tangentielle Geschwindigkeitskomponente, ω die Winkelgeschwindigkeit, σ die Flächendichte, Φ das Gravitationspotential, der Punkt die Ableitung nach der Zeit, der Strich die nach s , f das negative Vorzeichen von ω' (in unserem Falle gleich +1), δ ist eine reine Zahl der Größenordnung 1, die nach der Formel

$$w = \delta l v' \quad (3)$$

den Zusammenhang zwischen der Ableitung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v' , dem Mischungsweg l und der Turbulenzgeschwindigkeit w angibt.

Als nächstes brauchen wir noch die Kontinuitätsgleichung

$$s \dot{\sigma} + (s v_s \sigma)' = 0. \quad (4)$$

$s v_s \sigma$ bedeutet dabei den Materiestrom, d. i. die sekundlich durch den Einheitswinkel im Abstande s transportierte Masse. Positiver Materiestrom bedeutet, die Strömung ist nach außen gerichtet. Für die weitere Rechnung ist es jetzt bequemer, statt der Dichte σ die außerhalb s im Einheitswinkel befindliche Masse ψ zu betrachten:

$$\psi = \int_s^\infty s \sigma ds. \quad (5)$$

Integrieren wir Gl. (5) und setzen in (2) ein, so wird

$$\dot{\psi} = \delta \frac{(\psi' l^2 s^3 \omega'^2)'}{(s^2 \omega)'} + \psi' \frac{s^2 \dot{\omega}}{(s^2 \omega)'} \quad (6)$$

$s^2 \omega$ bedeutet dabei den Drehimpuls pro Masse. Gl. (6) zeigt, daß die Ableitung dieser Größe das Vorzeichen nicht wechseln darf. Normalerweise ist diese Ableitung positiv. Abnahme des Drehimpulses nach außen würde bedeuten: Ein zufällig etwas nach außen verschobenes Teilchen hätte nun zu viel Drehimpuls, würde also noch weiter nach außen fliegen und umgekehrt, d. h. die Strömung wäre instabil.

Es liegt nahe, statt des Abstandes s die Größe $\xi = s^2 \omega$ als neue unabhängige Variable einzuführen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \delta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} (s^2 \omega)' l^2 s^3 \omega'^2 \right]. \quad (7)$$

Der in der Klammer auf der rechten Seite stehende Term $(s^2 \omega)' l^2 s^3 \omega'^2$ ist nunmehr eine Funktion von ξ und t . Gelänge es schließlich noch, den Zusammenhang zwischen der jeweiligen DichteVerteilung und der Winkelgeschwindigkeit ω , der durch Gl. (1) gegeben ist, einfach darzustellen, so wäre die Lösung des Problems auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung zurückgeführt. Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, wie dies in einem Spezialfall möglich ist.

2. Die spezielle Lösung

Wir wollen für die DichteVerteilung für $t=0$ den speziellen Ansatz machen

$$\sigma_0 = A \sqrt{1 - (s/s_1)^2}. \quad (8)$$

Das Potential im Innern der Scheibe bestimmt sich hier am bequemsten direkt aus dem Integral

$$\Phi = -G \int_F \frac{\sigma df}{r}. \quad (9)$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante, r der Abstand zwischen Integrationspunkt und Aufpunkt. Das Integral ist über die ganze Scheibe zu erstrecken. Führt man Polarkoordinaten ein mit dem Aufpunkt als Ursprung, so läßt sich das Integral für unsere spezielle Verteilung (8) elementar ausführen und ergibt

$$\Phi = -\frac{\pi^2}{2} G A s_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_1} \right)^2 \right], \quad (10)$$

d. h. quadratisches Potential und damit lineares Kraftgesetz bzw. starre Rotation. Die dazugehörige Winkelgeschwindigkeit, wir wollen sie mit ω_0 bezeichnen, wird dann nach Gl. (1)

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{3} \pi}{2} \frac{\sqrt{G M}}{s_1^{3/2}}. \quad (11)$$

Dabei haben wir gleich die Konstante A mit Hilfe der zu (8) gehörigen Gesamtmasse M eliminiert.

In diese Verteilung werde nun eine Zentralmasse M_0 hineingesetzt. Dadurch erhalten wir eine Abweichung von der starren Rotation, d. h. Reibung. Unsere Variable ξ hat jetzt das Aussehen

$$\xi = \sqrt{G} \cdot \sqrt{M_0 s + \frac{3 \pi}{4} \frac{M}{s_1^3} s^4}. \quad (12)$$

Nunmehr wollen wir unsere bereits eingangs erwähnte Vereinfachung anbringen: Die zeitliche Veränderung des Potentials soll nur dadurch berücksichtigt werden, daß wir die beiden Massen M_0 und

M als zeitlich variabel ansehen und die spezielle Veränderlichkeit der DichteVerteilung außer acht lassen. Dieses Vorgehen muß später gerechtfertigt werden. Die gewünschte Reduktion unseres Problems auf eine einzige Differentialgleichung ist damit geschehen. Offen ist noch der Mischungsweg. In I wurde er proportional zum Abstand, bei Lüst² proportional einer beliebigen Potenz des Abstandes gemacht. Diese Ansätze machen unsere Differentialgleichung noch nicht einer geschlossenen Integration zugänglich. Wir wählen daher den folgenden:

$$l = \alpha s \left[\frac{M_0 + 3\pi/4 \cdot (s/s_1)^3}{M_0 + 3\pi(s/s_1)^3} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

(α ist eine dimensionslose Zahl.) Im Einflußbereich der Zentralmasse ist demnach $l \approx \alpha s$, außerhalb $l \approx \alpha s/2$.

Diese etwas künstlich erscheinende Annahme sei durch die geringe Abweichung vom linearen Mischungsweg und vor allem durch die große mathematische Vereinfachung für unser Problem gerechtfertigt, die sie bedingt. Gl. (7) schreibt sich nunmehr nach Einsetzen von Gln. (12) und (13)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{9}{8} \delta a^2 G^2 M_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]. \quad (14)$$

Das ist eine lineare, parabolische Differentialgleichung mit noch von t abhängigen Koeffizienten. Eine letzte Transformation soll die endgültige Form unserer Hauptgleichung ergeben:

Zunächst sei $(s^2 \omega)^{3/2}$ als neue Veränderliche eingeführt, die wir gleich mit $(s_1^2 \omega_0)^{3/2}$ dimensionslos machen wollen. ω_0 war [vgl. Gl. (11)] die zu der Anfangsverteilung gehörige konstante Winkelgeschwindigkeit. Seien μ und μ_0 die mit der Anfangsmasse des Gases dimensionslos gemachten zeitlich veränderlichen Massen M und M_0 , so lässt sich unsere endgültige Koordinate schreiben

$$x = (4/3 \pi \cdot \mu_0 s/s_1 + \mu (s/s_1)^4)^{3/4}. \quad (15)$$

Statt der Zeit t führen wir ein

$$\tau = t \omega_0 \quad (16)$$

und definieren als zweite unabhängige Variable

$$y = \frac{9}{2\pi^2} \delta a^2 \int_0^\tau \mu_0^2 d\tau. \quad (17)$$

Damit wird aus Gl. (14)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^{1/3} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{-1/3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]. \quad (18)$$

Nach Separation erhalten wir die beiden Grundlösungen

$$\psi = x^{2/3} J_{\pm 2/3}(\lambda x) \exp(-\lambda^2 y) \quad (19)$$

mit dem Separationsparameter λ^2 und $J_{\pm 2/3}$ der Bessel-Funktion mit dem Index $\pm 2/3$ bzw. $-2/3$.

Es gilt nun noch, eine beliebig vorgegebene Anfangsverteilung nach den beiden Grundlösungen zu entwickeln. Es wird dann allgemein

$$\psi = x^{2/3} \int_0^\infty d\lambda A(\lambda) J_{\pm 2/3}(\lambda x) \exp(-\lambda^2 y) \quad (20)$$

mit dem Entwicklungskoeffizienten

$$A(\lambda) = \lambda \int_0^\infty dz z^{1/3} J_{\pm 2/3}(\lambda z) \psi_0(z). \quad (21)$$

Dabei bedeutet ψ_0 die Verteilung ψ zur Zeit $t=0$. Gl. (21) kann in das Integral (20) eingesetzt werden. In dem so entstehenden Doppelintegral dürfen wir die Integration nach λ gleich durchführen und erhalten

$$\psi = \frac{x^{2/3}}{2y} \int_0^\infty dz z^{1/3} I_{\pm 2/3}(x z/2y) \exp(-(x^2 + z^2)/4y) \psi_0(z). \quad (22)$$

Dabei bedeutet $I_{\pm 2/3}(z)$ die modifizierte Bessel-Funktion. Welchen der beiden möglichen Indizes wir zu wählen haben, wird erst durch die am Nullpunkt vorzugebenden Randbedingungen festgelegt. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

3. Die Randbedingungen

Zur Diskussion der Verhältnisse am Nullpunkt führen wir 2 neue Größen ein, den schon oben erwähnten Materiestrom I und eine analog für den Drehimpuls gebildete Größe, den Drehimpulsstrom K . Zunächst zum ersten:

I, d. h. die sekundlich durch den Einheitswinkel im Abstande s strömende Masse, ist definiert durch

$$I = s v_s \sigma. \quad (23)$$

Nach Gln. (4) und (5) können wir dafür auch schreiben

$$I = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (24)$$

bzw. in unseren Koordinaten x und y

$$I = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (25)$$

Es interessiert das Verhalten dieser Größe im Nullpunkt, d. h. wir müssen die Größen $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$ für kleine x untersuchen.

Betrachten wir zu diesem Ende die Potenzreihendarstellung von $J_r(z)$:

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_n \frac{(z/2)^{2n}(-1)^n}{n! \Gamma(r+1+n)}. \quad (26)$$

Damit lassen sich unsere Grundlösungen [Gl. (19)] in der Nähe von $x=0$ darstellen durch

$$\psi \sim \exp(-\lambda^2 y) x^{4/3} \quad (27)$$

bzw.

$$\psi \sim \exp(-\lambda^2 y) (1 - \text{const} \cdot x^2). \quad (28)$$

Wir erhalten demnach in beiden Fällen

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x=0,$$

während $\partial\psi/\partial y$ nur im zweiten Fall ($r=-2/3$) von Null verschieden, und zwar negativ wird; wir haben also hier einen im Nullpunkt nicht verschwindenden Materiestrom, es fließt Masse aus dem Gas in die Zentralmasse ab.

Jetzt zum Drehimpulsstrom: Mit Hilfe der Gln. (2) und (23) können wir bilden

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma s^2 \omega) = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} [s^2 \omega I + \delta l^2 s^4 \sigma \omega'^2]. \quad (29)$$

Fassen wir dies als Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls auf, so definiert der rechts in der Klammer stehende Ausdruck den gesuchten Drehimpulsstrom K :

$$K = s^2 \omega I + \delta l^2 s^4 \sigma \omega'^2. \quad (30)$$

Drehimpuls wird also einmal durch Konvektion, zum andern durch Reibung transportiert. Untersuchen wir nun das asymptotische Verhalten des Drehimpulsstromes für kleine Abstände, so ergibt sich mit Gln. (27) bzw. (28) folgendes: Der Konvektionsanteil verschwindet in beiden Fällen, da $s^2 \omega$ proportional zu $x^{2/3}$ ist. Mit Gln. (5), (13) und (15) erhalten wir das Verhalten von K zu

$$K \sim x^{-1/3} \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (31)$$

d. h. im ersten Falle ($r=+2/3$) erhalten wir einen endlichen positiven Beitrag im Nullpunkt, während K im zweiten Falle dort verschwindet. Fassen wir zusammen: Bei der Lösung mit dem Index $+2/3$ haben wir eine Drehimpulsquelle im Nullpunkt und dort verschwindenden Materiestrom, bei der anderen Lösung eine Massensenke, während dort der Drehimpulsstrom verschwindet. Die erste Lösung liefert

zeitlich konstante Zentralmasse, die dauernd Drehimpuls an die Umgebung abgeben muß. Das würde bei unseren vereinfachten Annahmen über die Zeitabhängigkeit des Gravitationspotentials bedeuten, daß dieses zeitlich konstant bleibt, denn die Masse des Gases kann sich nur durch Abfluß in die Zentralmasse ändern. Außerdem muß hier noch ein Mechanismus angegeben werden, der den Drehimpuls vom Zentralkörper wirklich auf das umgebende Gas überträgt kann. Von Lüst⁶ wurde zu diesem Ende eine magnetische Kopplung vorgeschlagen, die das Gewünschte leistet.

Haben wir einen derartigen Mechanismus nicht, so muß man im Nullpunkt verschwindenden Drehimpulsstrom fordern, damit ist für das Folgende die Lösung mit dem Index $-2/3$ ausgesondert.

4. Die Zentralmasse

In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit der Zentralmasse von der Zeit untersucht und damit gleichzeitig der Zusammenhang zwischen unserer Koordinate y und t festgelegt werden. Dazu müssen wir den Anfangszustand noch etwas präzisieren. Die Dichte habe die Verteilung nach Gl. (8). Die Zentralmasse nun sei zu Anfang verschwindend klein, so daß wir sie für die Berechnung von x aus dem Abstand s [Gl. (15)] vernachlässigen können. Exakt verschwindende Zentralmasse hingegen würde starre Rotation, damit keine Reibung und Stationarität liefern. Gl. (15) wird damit für $t=0$ (μ ist definitiengemäß gleich 1 für $t=0$)

$$x = (s/s_1)^3. \quad (32)$$

Gleichzeitig haben wir zwischen den beiden dimensionslosen Massen folgende Beziehung:

$$\mu = 1 - \mu_0. \quad (33)$$

(Die Summe beider Massen muß die Anfangsmasse des Gases ergeben.) Gl. (5) wird mit Gl. (8) für $t=0$

$$\psi_0 = \frac{A s_1^2}{3} [1 - (s/s_1)^2]^{3/2}, \quad (34)$$

bzw. in x

$$\psi_0 = \frac{A s_1^2}{3} [1 - x^{2/3}]^{3/2} \quad (35)$$

für $0 < x < 1$, $\psi_0 = 0$ sonst.

⁶ R. Lüst, Z. Naturforschg., in Vorbereitung.

Damit wird unsere Gl. (22)

$$\psi = \frac{A s_1^2}{3} \frac{x^{2/3}}{2y} \cdot \int_0^1 dz z^{1/3} I_{-2/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} [1-z^{2/3}]^{3/2}. \quad (36)$$

Zur Bestimmung der Masse benötigen wir diesen Ausdruck an der Stelle $x=0$. Setzen wir die Potenzreihenentwicklung von $I_{-2/3}(z)$ ein,

$$I_{-2/3}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-2/3} \sum_n \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\frac{1}{3}+n)}, \quad (37)$$

und integrieren gliedweise, so bleibt für $x=0$ nur das erste Glied der so entstehenden Reihe übrig und es ergibt sich für die Nebelmasse μ :

$$\mu = \frac{z^{1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3}) y^{1/3}} \int_0^1 dz z^{-1/3} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4y} \right\} [1-z^{2/3}]^{3/2}. \quad (38)$$

Das gibt uns μ als Funktion von y . Das Integral ist nun nicht mehr elementar auszuführen, wir sind auf numerische Integration angewiesen, wenn wir die Zeitabhängigkeit explizit haben wollen. Es bleibt noch die Masse in Abhängigkeit der wahren Zeit t bzw. unserer dimensionslosen Zeit τ nach Gl. (16) (Zeiteinheit: ein bei der Rotation durchmesser Einheitswinkel) zu bestimmen. Dazu kehren wir Gl. (17) um und haben unter Beachtung von Gl. (33)

$$\tau = \frac{2\pi^2}{9\delta a^2} \int_0^y \frac{dy}{(1-\mu)^2}. \quad (39)$$

Jetzt ist alles bekannt und wir sind im Prinzip fertig. Die gefundenen Ausdrücke sind jedoch sehr unübersichtlich und die eigentlich interessierenden Größen, nämlich Dichtevertteilung, Materie- und Drehimpulsstrom z. B. nur dadurch erhältlich, daß wir Gl. (36) numerisch auswerten, dann vermöge Gl. (15) von x auf den eigentlichen Abstand s umtabellieren und nun nochmals numerisch differenzieren. Letzteres läßt sich zumindest vermeiden, die Durchführung sei auf den nächsten Abschnitt verschoben.

Zuvor wollen wir den Verlauf der Zentralmasse für kleine y näherungsweise angeben. Betrachten wir zu diesem Ende Gl. (38): Für sehr kleine y verschwindet der Exponentielfaktor schnell und wir können die obere Integrationsgrenze durch ∞ ersetzen. Den im Integranden stehenden Term $[1-z^{2/3}]^{3/2}$ entwickeln wir bis zum linearen Glied:

$$[1-z^{2/3}]^{3/2} = 1 - \frac{3}{2} z^{2/3}. \quad (40)$$

Damit erhalten wir

$$\mu = 1 - \frac{3}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} (4y)^{1/3}. \quad (41)$$

Gehen wir damit in Gl. (39) ein, so wird

$$\tau = \frac{2}{27} \frac{\pi^2}{\delta a^2} \frac{(\Gamma(1/3))^2}{\Gamma(2/3)} (4y)^{1/3}, \quad (42)$$

d. h. unsere gesuchte Zentralmasse kommt zu

$$\mu_0 = \frac{3}{(2\pi)^2} \frac{(\Gamma(2/3))^2}{\Gamma(4/3)} \frac{\delta a^2}{\pi^2} \tau, \quad (43)$$

wobei wir noch von der Funktionalgleichung der Γ -Funktion Gebrauch gemacht haben:

$$\Gamma(4/3) = \frac{1}{3} \Gamma(1/3). \quad (44)$$

Wir erhalten linearen Zuwachs der Zentralmasse, und wie die spätere genauere Auswertung zeigt, ist diese Approximation noch brauchbar, bis die Zentralmasse etwa 10% der Nebelanfangsmasse aufgesammelt hat.

5. Dichtevertteilung, Materie- und Drehimpulsstrom

In diesem Abschnitt sollen Ausdrücke für die Dichtevertteilung, den Materie- und den Drehimpulsstrom aus unserer Lösung Gl. (36) abgeleitet werden. Nach Gl. (5) wird

$$\sigma = -\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (45)$$

Dazu benötigen wir $\partial \psi / \partial x$.

Betrachten wir zunächst die folgende Relation⁷:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{2/3} I_{-2/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} \right] \\ &= x^{2/3} \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} \left[\frac{z}{2y} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) - \frac{x}{2y} I_{-2/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \right] \\ &= -x^{2/3} z^{-1/3} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{1/3} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Setzen wir ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{A s_1^2}{3} \frac{x^{2/3}}{2y} \int_0^1 dz [1-z^{2/3}]^{3/2} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{1/3} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} \right], \end{aligned} \quad (47)$$

bzw. nach partieller Integration:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{A s_1^2}{3} \frac{x^{2/3}}{2y} \int_0^1 dz [1-z^{2/3}]^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2+z^2}{4y} \right\} \quad (48)$$

⁷ Vgl. hier wie überall dort, wo Gebrauch gemacht wird von Eigenschaften der Besselschen Funktionen: Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze, Springer, Berlin 1948 oder auch Watson, Theory of Bessel-functions, Cambridge 1952.

Mit

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{3}{4} \frac{x^{-1/3}}{s_1} \left[\frac{4}{3\pi} \mu_0 + 4(1-\mu_0) (s/s_1)^3 \right] \quad (49)$$

nach Gl. (15) wird also

$$\frac{s}{s_1} \sigma = \frac{A}{4} \left[\frac{4}{3\pi} \mu_0 + 4(1-\mu_0) (s/s_1)^3 \right] x^{1/3} \Phi_1 \quad (50)$$

mit der Abkürzung

$$\Phi_1 = \frac{1}{2y} \int_0^1 dz [1 - z^{2/3}]^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{4y} \right\}. \quad (51)$$

Die Bestimmung des Dichteverlaufs für eine bestimmte Zeit τ geht nun so vor sich:

Nach Gl. (38) ist die Funktion $\mu(y)$ bekannt, damit der Zusammenhang zwischen τ und μ nach Gl. (39) und schließlich gleichzeitig der zwischen τ und y . Gl. (15) liefert das zu einem bestimmten s gehörige x , und damit gestattet Gl. (50) endlich, das gesuchte σ als Funktion von s zu bestimmen, und wir haben, wie angekündigt, zur eigentlichen Berechnung nur Quadraturen durchzuführen.

Der Materiestrom wird nach Gl. (24)

$$I = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (52)$$

Wir brauchen also noch $\partial \psi / \partial y$, das wir am besten über die Differentialgl. (18) bestimmen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{3x} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (18')$$

Die Ausführung unter Verwendung von Gl. (48) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{As_1^2}{3} \frac{x^{2/3}}{(2y)^2} \left[x \int_0^1 dz [1 - z^{2/3}]^{1/2} I_{1/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{4y} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 z dz [1 - z^{2/3}]^{1/2} I_{-2/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{4y} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Wir definieren nun analog zu Gl. (51)

$$\Phi_2 = \frac{1}{(2y)^2} \int_0^1 z dz [1 - z^{2/3}]^{1/2} I_{-2/3} \left(\frac{xz}{2y} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{4y} \right\}, \quad (54)$$

d. h.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{As_1^2}{3} x^{2/3} \left[\frac{x}{2y} \Phi_1 - \Phi_2 \right]. \quad (55)$$

Nach Gln. (16) und (17) haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{9}{2\pi^2} \delta a^2 \mu_0^2 \omega_0; \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{3}{4} x^{-1/3} \left[\frac{4}{3\pi} \frac{s}{s_1} - \left(\frac{s}{s_1} \right)^4 \right] \omega_0 \frac{d\mu_0}{d\tau}. \end{aligned} \quad (56)$$

Als einziger Differentialquotient bleibt noch $d\mu_0/d\tau$. Es sei gezeigt, daß auch dieser mit Hilfe eines Integrals dargestellt werden kann:

$$\frac{d\mu_0}{d\tau} = \frac{d\mu_0}{dy} \frac{dy}{d\tau} = - \frac{d\mu}{dy} \frac{dy}{d\tau} \quad (57)$$

[nach Gl. (33)]. Benutzen wir noch Gl. (17) und beachten ferner, daß gilt

$$\mu = \frac{3}{A s_1^2} (\psi)_{x=0}, \quad (58)$$

so wird

$$\frac{d\mu_0}{d\tau} = - \frac{9}{2\pi^2} \delta a^2 \mu_0^2 \frac{3}{A s_1^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{x=0}. \quad (59)$$

$\partial \psi / \partial y$ haben wir durch 2 Integrale dargestellt. Der erste Term verschwindet jedoch an der Stelle $x=0$, wovon man sich sofort durch Einsetzen der Potenzreihenentwicklung von $I_r(z)$ überzeugen kann. Wir erhalten demnach

$$\frac{d\mu_0}{d\tau} = \frac{9}{2\pi^2} \delta a^2 (x^{2/3} \Phi_2)_{x=0}, \quad (60)$$

und es genügt die Kenntnis des Integrals Φ_2 . Der gesuchte Materiestrom schreibt sich also

$$\begin{aligned} I &= A s_1^2 \omega_0 \frac{3}{2\pi^2} \delta a^2 \mu_0^2 x^{1/3} \\ &\cdot \left\{ \Phi_1 \left[\frac{x^{4/3}}{2y} - \frac{3}{4} \left(x^{2/3} \Phi_2 \right)_{x=0} \cdot \left(\frac{4}{3\pi} \frac{s}{s_1} - \left(\frac{s}{s_1} \right)^4 \right) \right] - x^{1/3} \Phi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Das kürzen wir ab mit

$$I = A s_1^2 \omega_0 \frac{3}{2\pi^2} \delta a^2 \mu_0^2 \Phi_3, \quad (62)$$

damit gleichzeitig die Funktion Φ_3 definierend.

Jetzt bleibt noch der Drehimpulsstrom zu bestimmen:

$$K = s^2 \omega I + \delta l^2 s^4 \omega'^2. \quad (30)$$

Der erste Term (konvektiver Anteil) ist nach vorangegangen bekannt, wenn man beachtet, daß nach Gln. (12) und (15)

$$s^2 \omega = x^{2/3} (s_1^2 \omega_0) \quad (63)$$

gilt. Der zweite Term bestimmt sich nach den von uns bei der Ableitung der Differentialgl. (18) gemachten Substitutionen zu

$$\delta l^2 s^4 \omega'^2 = A s_1^4 \omega_0^2 \frac{\delta a^2}{\pi^2} \mu_0^2 x^{1/3} \Phi_1. \quad (64)$$

Damit können wir schreiben

$$K = A s_1^4 \omega_0^2 \frac{\delta a^2}{\pi^2} \mu_0^2 x^{1/3} \left\{ \Phi_1 + \frac{3}{2} x^{1/3} \Phi_3 \right\}. \quad (65)$$

Die eben abgeleiteten Ausdrücke sind nun recht unhandlich, und wir wollen wenigstens versuchen,

den Verlauf der Dichte qualitativ zu beschreiben. Für kleine Abstände s gilt

$$x \sim s^{3/4}, \quad \Phi_1 \sim x^{1/3}$$

und damit

$$\sigma \sim 1/s^{1/2}.$$

Wir haben hier also das schon in der zitierten Arbeit² gefundene Phänomen, daß die Flächendichte in der Nähe der Zentralmasse unabhängig von der jeweiligen Anfangsverteilung stets das gleiche asymptotische Verhalten zeigt.

Für größere x ersetzen wir zunächst in Gl. (51) die Bessel-Funktion durch ihre asymptotische Form

$$I_r(z) \approx e^z / \sqrt{2\pi z}, \quad (66)$$

d. h.

$$\Phi_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi xy}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} [1 - z^{3/4}]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{(x-z)^2}{4y} \right\}. \quad (67)$$

Betrachten wir nun den Wurzelfaktor unter dem Integralzeichen als langsam veränderlich gegenüber der Exponentialfunktion, was für x -Werte nicht zu nahe an $x=1$ und hinreichend kleine y erlaubt ist, so wird angenähert

$$\Phi_1 \sim [1 - x^{3/4}]^{1/2}/x. \quad (68)$$

Wir erhalten damit

$$\sigma \approx A \sqrt{1 - \mu_0} [1 - \sqrt{1 - \mu_0} (s/s_1)^2]^{1/2}, \quad (69)$$

d. h. die Verteilung hat die gleiche Form behalten, nur haben sich die Parameter etwas geändert.

Beim Materiestrom und Drehimpulsstrom gelingt es nicht mehr, ähnlich einfache Ausdrücke für das asymptotische Verhalten anzugeben. Aus der Diskussion der Randbedingungen wissen wir jedoch schon, daß in der Nähe des Nullpunktes K verschwindet und I gegen einen endlichen, negativen Wert geht, qualitativ das Verhalten, wie es bereits früher² für Strömungen unter dem Einfluß einer Zentralmasse allein gefunden wurde, quantitativ kommt dadurch eine Abweichung herein, daß wir hier die Zentralmasse als zeitlich variabel betrachten.

6. Diskussion, Anwendungen

In den folgenden Abb. 1, 2 und 3 werden die Dichte σ , der Drehimpulsstrom K und der Materiestrom I als Funktionen des Abstandes s/s_1 zu verschiedenen Werten des Parameters y wiedergegeben. Dabei ist die jeweilige „gemittelte Dichteverteilung“, nach der die Eigengravitation des Gases ermittelt wurde, gestrichelt eingezeichnet worden. Gleichzeitig

wird der Abstand s_0 angegeben, von dem an die Eigengravitation die der Zentralmasse überwiegt. Es ist noch zu bemerken, daß nach Gl. (38) die Kenntnis von y bereits genügt, um μ und damit $x(s)$ festzulegen, die wahre Zeit τ geht direkt gar nicht ein. Gewählt wurden die Werte:

$$y = 10^{-4} (\mu_0 = 0,0550),$$

$$y = 10^{-3} (\mu_0 = 0,1167)$$

$$\text{und } y = 10^{-2} (\mu_0 = 0,2418).$$

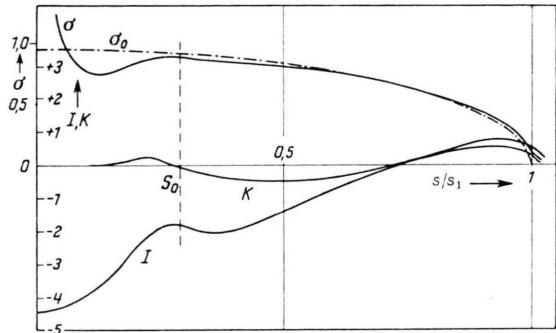


Abb. 1. Flächendichte σ , Materiestrom I und Drehimpulsstrom K für $y = 10^{-4}$ (aufgesammelte Zentralmasse = 0,055 der Nebelmasse). s_0 : Abstand, bis zu dem die Gravitationswirkung der Zentralmasse überwiegt. σ_0 = Dichteverteilung, nach der die Eigengravitation des Gases bestimmt wurde.

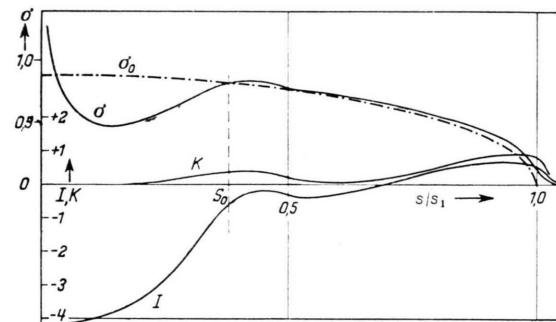


Abb. 2. Flächendichte σ , Materiestrom I , Drehimpulsstrom K für $y = 10^{-3}$ (aufgesammelte Zentralmasse = 0,1167 der Nebelmasse).

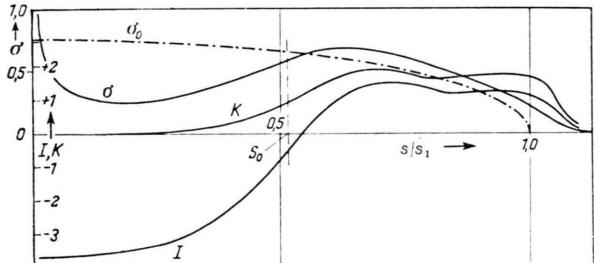


Abb. 3. Flächendichte σ , Materiestrom I , Drehimpulsstrom K für $y = 10^{-2}$ (aufgesammelte Zentralmasse = 0,2418 der Nebelmasse).

Als Maßeinheit wurde gewählt:

Für die Dichte der bei der Anfangsverteilung stehende Faktor A [Gl. (8)], für den Materiestrom $A s_1^2 \omega_0 \delta \alpha^2$ und für den Drehimpulsstrom der Wert $\frac{2}{3} A s_1^4 \omega_0 \delta \alpha^2$.

Zur zahlenmäßigen Festlegung von τ benötigen wir endlich die Turbulenzkonstanten $\delta \alpha^2$. v. Weizsäcker¹ schließt aus dem Aussehen der Spiralarme des Andromedanebels auf $\delta \alpha^2 \approx 1/40$. Setzen wir $\delta \alpha^2 = 0,01$, so ergibt die Rechnung, daß bei unserem Modell nach $\tau = 21,47$, das sind nicht ganz 3,5 Umdrehungen, bereits 5,5% der Gasmasse in das Zentrum abgeflossen sind, und das erscheint uns noch als etwas hoch. In diesem Faktor steckt indessen die ganze Turbulenztheorie, und es bleibt uns im Rahmen dieser Arbeit nur übrig, irgend eine plausible Annahme über den Wert dieser Konstanten zu machen. Wir wollen daher im folgenden bei $\delta \alpha^2 = 0,01$ bleiben. Danach entsprechen die obigen Abbildungen jeweils den Zeiten: $\tau = 21,74, 47,02$ und $105,0$. Im übrigen haben wir unsere Gleichungen so angeschrieben, daß $\delta \alpha^2$ überall nur als Faktor auftritt, d. h. bei geändertem Wert dieser Konstanten gehören die gleichen Kurven nur zu anderen Zeiten. Halbieren wir sie zum Beispiel, so gehören die oben dargestellten Zustände zu der doppelten Zeit, während gleichzeitig die Werte für I und K zu halbieren sind.

In obige Darstellungen wurde diejenige „gemittelte“ DichteVerteilung aufgenommen, nach der wir die Eigengravitation bestimmten, gleichzeitig wurde der Ort angegeben, von dem an diese die Einwirkung der Zentralmasse überwiegt. Wie man sieht, ist bei $y = 10^{-4}$ und $y = 10^{-3}$ die Abweichung der wahren DichteVerteilung davon nur gering, große Abweichungen treten nur im Einflußbereich der Zentralmasse auf. Bei $y = 10^{-2}$ hingegen sind die Abweichungen überall beträchtlich, dies dürfte die äußerste Grenze sein, bis zu der wir unsere angenäherte Behandlung des Potentials mit gutem Gewissen vertreten können.

Abb. 4 zeigt den Verlauf der Zentralmasse in Abhängigkeit von $\delta \alpha^2 \tau$. Die gestrichelte Gerade zeigt den Verlauf von μ_0 nach unserer Näherung [Gl. (43)], die, wie man sieht, den wahren Verlauf über ein großes Zeitintervall befriedigend darstellt.

Es seien abschließend zwei konkrete Beispiele durchgerechnet. Als erstes versuchen wir, unser Modell auf die Entstehung eines Sternes von etwa Son-

nenmasse anzuwenden. Eine gravitationsstabile, turbulente, rotierende Gaswolke zieht sich beim Abklingen der inneren Turbulenz auf ein flache, rotierende Scheibe zusammen, da die Erhaltung des Gesamt-drehimpulses eine wesentliche Kontraktion in Richtung auf die Rotationsachse verhindert. Bildet sich nun im Zentrum eine zufällige Kondensation (aus Symmetriegründen wohl der plausibelste Ort), so kommt unser Modell ins Spiel. Wollen wir es bis zur Grenze seiner Gültigkeit ausnützen, so muß das Gas etwa 5-fache Sonnenmasse haben. Diese Masse sei anfangs gleichmäßig auf eine Kugel vom Radius $r = 3 \cdot 10^{18}$ cm (ungefährer mittlerer Fixsternabstand) verteilt, d. h. die mittlere Dichte betrage etwa $2,5 \cdot 10^{-22}$ g/cm³. Für die daraus resultierende Scheibe erhalten wir eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega_0 = 7,6 \cdot 10^{-15}$ sec⁻¹. Wir erhalten demnach Sonnenmasse im Zentrum nach ca. $4 \cdot 10^8$ Jahren bei $\delta \alpha^2 = 0,01$. Multiplizieren wir nun die Winkelgeschwindigkeit mit dem Radius der Scheibe, so erhalten wir eine Abschätzung für die mittlere Geschwindigkeit: $v \approx 2 \cdot 10^4$ cm/sec.

Von derselben Größenordnung ist jedoch die thermische Geschwindigkeit bei einer Temperatur des interstellaren Gases von ca. 50° K, d. h. der Gasdruck darf nicht mehr vernachlässigt werden. Von Ebert⁸ wurde umgekehrt die Kontraktion einer Gasmasse gegen den Gasdruck untersucht, der im Anfangsstadium soweit überwiegt, daß die Wirkung der Rotation dagegen vernachlässigt werden kann. Es zeigte sich, daß in einem späteren Stadium der Entwicklung diese Vernachlässigung nicht mehr gerechtfertigt ist, so daß von da an unser Modell ins Spiel kommt. Eine genauere Berücksichtigung des Gasdruckes würde qualitativ eine Verringerung der Rotationsgeschwindigkeit ergeben, d. h. unsere obige

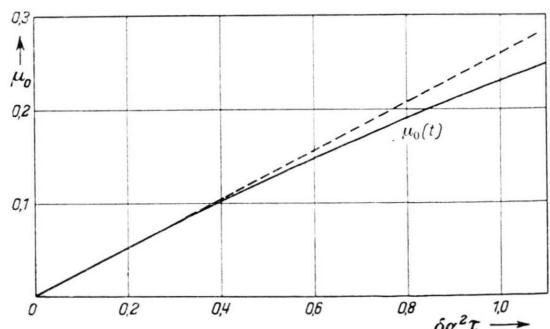


Abb. 4. Verhältnis von Zentralmasse zu Gesamtmasse μ_0 als Funktion der Zeit τ . Gestrichelt: μ_0 nach Näherung Gl. (43).

⁸ R. E b e r t , Z. Astrophys., im Erscheinen.

Abschätzung gibt eine untere Schranke für die zur Sternentstehung notwendige Zeit. Die DichteVerteilung des umgebenden Gases würde dann etwa unserer Abb. 3 entsprechen.

Wir wollen jetzt noch unsere Resultate mit Messungen am Andromedanebel, M 31, vergleichen, dessen Rotationsgesetz erstmalig von Babcock bestimmt wurde⁹. Neuere Messungen liegen vor von Mayall¹⁰, die wir zum Vergleich mit unserem Ansatz

$$\vartheta_\varphi = \frac{V\sqrt{G}}{s^{1/2}} \sqrt{M_0 + \frac{3\pi}{4} M(s/s_1)^3}$$

für die Tangentialgeschwindigkeit heranziehen wollen. In Abb. 5 sind die gemessenen Radialgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Abstand vom Zentrum längs der großen Achse bis zum Abstand von etwa 65' eingetragen. Hier hört der auf den meisten Photographien sichtbare Teil des Nebels auf. Ferner wurden die Radialgeschwindigkeiten eingezeichnet, die sich nach unserem Ansatz für Punkte, die genau auf der großen Achse liegen, ergeben. Gerade in der Nähe des Zentrums liegen nun die gemessenen Punkte sehr weit ab von der Hauptachse, so daß ein Vergleich nicht ohne weiteres möglich ist, während weiter außen die Übereinstimmung mit unserem stark schematisierten Modell zufriedenstellend ist. Messungen¹¹ an M 33 lassen ebenfalls auf praktisch starre Rotation im Hauptteil des Systems schließen, doch liegen hier nur wenig Meßpunkte im uns interessierenden Teil des Systems. Nehmen wir für M 31 größerenordnungsmäßig

$$\omega_0 = 10^{-8} \text{ Jahre}^{-1} \text{ an,}$$

so hat der Kern des Systems nach ungefähr $2 \cdot 10^9$ Jahren etwa 5% der Nebelmasse, und wir können seinen heutigen Zustand wohl am besten durch Abb. 1 darstellen. Es sei am Rande vermerkt, daß Wysse und Mayall⁴ aus dem Babcockschen Rotationsgesetz die Dichteverteilung berechnet haben und daß ihre Kurve verhältnismäßig gut in unsere Abb. 1 hineinpaßt, doch ist die Rotationsgeschwindigkeit zum Vergleich von Theorie und Messung erheblich besser geeignet, da große Variationen in der Geschwindigkeitsverteilung nur kleine Änderungen in der Dichteverteilung verursachen. Bei unseren Abbildungen ist ferner die zentrale Verdichtung weggelassen worden, d. h. wir haben sie so behandelt,

als sei sie ganz im Nullpunkt konzentriert. In Wirklichkeit wird sie stets eine endliche Ausdehnung haben, und unsere Berechnungen gelten nur bis zu ihrem Rand.

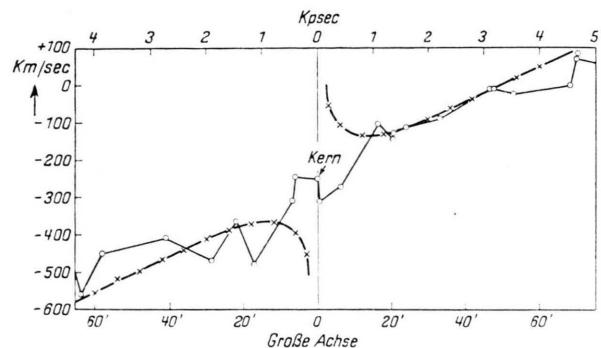


Abb. 5. In M 31 gemessene Radialgeschwindigkeiten, verglichen mit theoretischem Verlauf (s. Text).

Wir haben bisher den Spiralnebel als ganz aus Gas oder Staub bestehend angesehen und die Existenz von Sternen nicht berücksichtigt, die sicher einen großen Prozentsatz der Gesamtmasse des Systems ausmachen. Nach ihrer Bildung gehorcht ihre Bewegung nicht mehr den hydrodynamischen Gleichungen, sie werden vielmehr im Mittel den Abstand vom Zentrum behalten, den sie bei ihrer Entstehung hatten und damit das Potential praktisch zeitlich konstant halten. Auf die Dichteverteilung hat dies nur geringen Einfluß, Materie- und Drehimpulsstrom reagieren jedoch stark auf zeitlich veränderliches Potential. Vielleicht werden wir dem Andromedanebel in seiner heutigen Gestalt besser gerecht, wenn wir das Potential als konstant betrachten, d. h. den in Gl. (61) durch $d\mu_0/d\tau$ hineinkommenden Term weglassen. Abb. 6 gibt die so bestimmten Ströme wieder.

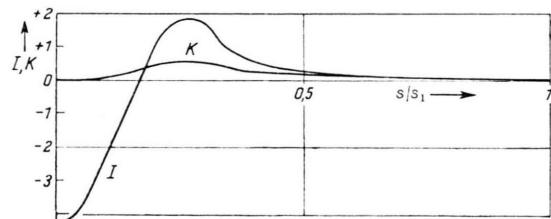


Abb. 6. Materiestrom I , Drehimpulsstrom K bei festem Potential für $y = 10^{-4}$ (0,055 der Nebelmasse im Zentrum).

⁹ H. W. Babcock, Lick Obs. Bull. **19**, 41 [1939].

¹⁰ N. U. Mayall, Publ. Obs. University of Michigan **10**, 19 [1950].

¹¹ N. U. Mayall u. L. H. Aller, Astrophys. J. **95**, 5 [1942].

$$I = A s_1^2 \omega_0 \frac{3}{2\pi^2} \delta a^2 \mu_0^2 x^{1/3} \left[\frac{x^{4/3}}{2y} \Phi_1 - x^{1/3} \Phi_2 \right], \quad (70)$$

$$K = A s_1^4 \omega^2 \frac{\delta a^2}{\pi^2} \mu_0^2 \left[\Phi_1 \left(x^{1/3} + \frac{3x^2}{4y} \right) - \frac{2}{3} x \Phi_2 \right]. \quad (71)$$

Hier haben wir nur im innersten Bereich ein nach Innenströmen der Materie, während weit außen wegen der praktisch starren Rotation sich nichts ändert.

Die zur Herstellung der Abbildungen notwendigen numerischen Rechnungen wurden auf der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 1 durchgeführt, für deren Überlassung ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor C. F. v. Weizsäcker gebührt mein besonderer Dank für vielerlei Hilfes anhaltende Geduld und wertvolle Anregungen.

Korngrenzenstruktur und Ladungsträgertransport in Halbleiterkristallen*

Von H. F. MATARÉ **

West End, New Jersey, U.S.A.

(Z. Naturforschg. **10a**, 640—652 [1955]; eingegangen am 21. Juli 1955)

The structural character of boundaries or interfaces between two perfect crystals of different orientation but equal chemical composition defines the behavior of grain boundaries with respect to carrier transport. The amount of misfit in the grain boundary zone, as well as the amount of energy stored by elastic deformation, defines the electrical properties.

The number of free carriers (electrons) in boundary states increases with the cross-potential applied, while positive space charge regions build up on both sides of the boundary. The boundary zone itself has p-type character and becomes more conductive when the number of electrons bound to the dangling bonds increases. Grain boundary zones may be as thick as a few tenths of a mm. Extremely small zones are formed by disturbed twins.

Two and three probe measurements on such bicrystals have been made in order to study the carrier transport phenomena. High current multiplication due to carrier density misfit and gate action in the case of opposite polarization have been found. In addition, contacts were plated to boundary-zones; and modulation through the bulk material, as in a NPN-junction, was studied. Here current multiplication can reach high values even in a base-to-ground connection.

Since those electrons bound to a grain boundary interface by a cross potential may be present only in the form of excitons, in the field of their dangling bonds before adjustment, their time constants for recharging processes might be very short such that it is probable that high frequency response is improved. Basic elements and consequences of the developed theory and the correlation between boundary stress field and carrier transport are outlined.

Sein den ersten Arbeiten über das elektrische Verhalten von Korngrenzen durch Pearson⁶, Taylor und Mitarb.⁷ ist es bekannt, daß „Korngrenzen“ — als solche sind hier die verbindenden Zwischenzonen zwischen zwei Orientierungen (Körnern) verstanden — in N-Typ-Material ganz spezifische Charakteristika haben.

1. Der spezifische Widerstand, quer zur KG-Zone gemessen, springt auf hohe Werte. Zum Beispiel bei

einem Germanium-Kristall von 5 Ohm · cm können Sprünge von 10^2 bis 10^4 Ohm · cm gemessen werden.

2. Sondenmessungen zeigen, daß das KG-Feld P-Typ-Charakter hat, wenn das perfekte *** Kristallmaterial N-Typ-Charakter aufweist.

3. Der spezifische Widerstand in Richtung der KG-Ebene, parallel zu den freien Bindungen, ist geringer, als der des perfekten Kristalls (vgl. ^{4, 5, 29}).

* Nach einem Vortrag, gehalten auf der 55. Sitzung der American Physical Society in New York, 28. Januar 1955. Siehe Literatur ^{1—5}.

** Forschungslaboratorium der „Tung-Sol Electric Corp.“, Bloomfield, New Jersey, U.S.A.

*** „perfekt“ wird im Text nur in bezug auf die Kristallstruktur, nicht in bezug auf den chemischen Störstellengehalt angewandt.

¹ H. F. Mataré, Z. Naturforschg. **9a**, 698 [1954].

² H. F. Mataré, H. Kedesdy u. Mitarb., Phys. Rev. Bull. **30**, 40 [1955] u. Phys. Rev. **98**, No. 4, 1179 [1955].

³ H. F. Mataré, Trans., National Convention IRE, New York, März 1955.

⁴ H. F. Mataré, Techn. Memorandum No. M-1621, Signal Corps Eng. Labs. Project No. 132 A [1955].

⁵ H. F. Mataré, Techn. Memorandum No. M-1647, Signal Corps Eng. Labs. Project No. 132 A [1955].

⁶ G. Pearson, Phys. Rev. **76**, 459 [1949].

⁷ W. E. Taylor, N. H. Odell u. H. Y. Fan, Phys. Rev. **88**, 867 [1952].